

ÉTUDE GNOMONIQUE D'UN CADRAN SOLAIRE DÉCOUVERT A CARTHAGE

Denis SAVOIE* et Roland LEHOUCQ**

Résumé : Cet article est consacré à la description d'un cadran solaire exceptionnel découvert à Carthage. Particulièrement bien conservé et exposé aujourd'hui au Musée du Louvre, il appartient au type appelé «scaphé». C'est une demi-sphère en marbre clair cristallisé qui doit être placée verticalement afin que les rayons du Soleil passent par un œilleton situé au zénith de la sphère. L'heure est indiquée par une tache de lumière qui se projette dans la concavité. Il comporte sept courbes de déclinaison indiquant la date avec des inscriptions grecques ainsi que les heures solaires temporaires. Nous expliquons la théorie d'un tel cadran et la façon de le calculer. Nous démontrons également que ce cadran n'était pas tracé par la latitude de Carthage, bien que son origine romaine ne fasse aucun doute, comme en témoigne par exemple la traduction grecque des noms des mois du calendrier julien.

Abstract : This article is devoted to the description of an outstanding sundial, discovered in Carthage. It is a very well preserved particular type of "scaphea", today exposed at the Louvre museum. This sundial is a half-sphere made of crystallized beige marble. It must be used inclined so that the solar rays passing through its zenithal hole hit the lower edge of the sundial at noon of the winter solstice. The hour is indicated by the solar image projected on the shaded interior surface of the sundial. It includes seven declination curves, with abbreviations in greek or roman calendar months, together with eleven hour curves without figures. We describe completely the use and the way of calculating such a sundial. Moreover, we demonstrate that this scaphea was not designed for Carthage but that its roman style is unquestionable: julian calendar months translated in greek, external aspect of the sundial, copiously decorated with oak leaves and acorns, are converging clues.

Mots-clés : Scaphé, menaeus, gnomonique, cadran solaire.

Key-words : Sundial, scaphea, julian calendar, history of hour.

Dans un article paru dans *l'Astronomie*¹, P. Gagnaire a expliqué les grandes lignes du fonctionnement d'un cadran solaire exceptionnel, découvert à Carthage avant la seconde guerre mondiale. C'est à ce jour l'exemplaire le mieux conservé d'un type particulier de scaphé², aujourd'hui exposé au Musée du Louvre, dans le Département des Antiquités grecques, étrusques et romaines.

Ce cadran est une demi-sphère en marbre beige clair cristallisé, qui fonctionne incliné afin que l'image du Soleil qui entre par l'œilleton situé au zénith, tombe sensiblement à midi au solstice d'été sur le bord inférieur du cadran³. La lecture de l'heure s'effectue donc par contraste puisque le cadran est toujours dans l'ombre :

seule la tache de lumière se déplace au cours d'une journée dans la concavité. Le cadran comporte sept courbes de déclinaison, avec des indications et des abréviations grecques des mois du calendrier romain, et onze autres courbes d'heures, non chiffrées.

1 - ÉTUDE GNOMONIQUE

Dans la suite de l'article, on notera R le rayon du cadran, demi-sphère de centre C , ϕ la latitude du lieu, δ la déclinaison du Soleil, H son angle horaire, h sa hauteur et a son azimut.

* Président de la Commission des cadrans solaires, Observatoire de Paris/DANOF, denis.savoie@palais-decouverte.fr

** CEA/DSM/DAPNIA/Service d'Astrophysique, Saclay, roller@discovery.saclay.cea.fr



Cadran solaire de Carthage.

Ce cadran est une demi-sphère dont le plan de coupure est placé verticalement face au Sud et dont le pôle supérieur est percé d'un oeilleton. Les rayons du Soleil passant par l'oeilleton forment, à l'intérieur de la surface sphérique plongée dans l'ombre, une tache lumineuse, mobile au cours du temps. En une journée, ces rayons engendrent un cône, incomplet sous nos latitudes, dont le sommet est l'oeilleton, d'axe confondu avec l'axe de rotation de la Terre et de demi-angle au sommet $90^\circ - \delta$. Une courbe d'égale déclinaison est donc l'intersection entre ce cône et la demi-sphère du cadran⁴.

La nature des courbes d'égale déclinaison – et par suite celle des courbes horaires – peut être déterminée par deux méthodes, l'une classique basée sur la trigonométrie, l'autre tirant parti du calcul vectoriel et matriciel⁵.

1.1 - NATURE DES COURBES D'ÉGALE DÉCLINAISON

1.1.1 - Méthode trigonométrique

Il est ici commode de projeter l'image du Soleil sur le plan équatorial passant par l'oeilleton O, repéré par un système de deux axes orthogonaux, l'axe Oy dirigé vers le Nord et l'axe Ox vers l'Est. A un instant donné, la tache de lumière formée par les rayons passant par l'oeilleton O tombe sur la demi-sphère au point I. Comme le montre la figure 1, on a, dans le plan OCI, $OI = 2R \sin h$. Le point I se projette sur le plan équatorial en un point I' dont les coordonnées polaires habituelles (ρ, θ) sont données par $\rho = OI' = OI \cos \delta$ et $\theta = 90^\circ - H$ (voir figure 2). Comme par ailleurs $\sin h = \sin \delta \sin \phi + \cos \phi \cos \delta \cos H$, l'équation polaire du lieu de projection de l'image du Soleil sur le plan équatorial est :

$$\rho(\theta) = 2R \cos \delta (\sin \delta \sin \phi + \cos \phi \cos \delta \cos \theta) \quad (1)$$

C'est une équation de la forme $\rho(\theta) = 2A \sin \theta + B$ où $A = R \cos \phi \cos^2 \delta$ et $B = R \sin \phi \sin 2\delta$, c'est-à-dire l'équation d'une conchoïde⁶ du cercle de rayon $R \cos \phi$ tangent en O à l'axe Ox, et dont l'axe de symétrie est Oy.

L'équation (1) appelle plusieurs remarques :

– aux équinoxes, la déclinaison du Soleil est nulle et donc $B = 0$. La courbe décrite par l'image du Soleil est un cercle, dit cercle équinoxial, intersection du plan de l'équateur avec le cadran. Il est tangent en O à l'axe Ox et de rayon $A = R \cos \phi$.

– l'angle horaire H_0 du Soleil au lever et au coucher vérifie $\cos H_0 = -\tan \phi \tan \delta$. A ces instants, le Soleil se projette exactement sur l'oeilleton car $\rho(90^\circ - H_0) = 0$; l'oeilleton est donc le point double de la conchoïde. La projection de l'image du Soleil ne parcourt, entre son lever et son coucher, que la partie de la conchoïde qui correspond à l'intervalle. $\theta \in [90^\circ - H_0, 90^\circ + H_0]$. L'autre partie est parcourue dans le même sens lorsque le Soleil aura atteint une déclinaison opposée (figure 3).

– l'équation cartésienne de la conchoïde est facile à obtenir. Il suffit pour cela de multiplier l'équation (1) par ρ sachant que $\rho^2 = x^2 + y^2$ et que $y = \rho \sin \theta$. On obtient finalement l'équation d'une quadrique de la forme $(x^2 + y^2 - 2A y)^2 = B(x^2 + y^2)$.

1.1.2 - Méthode vectorielle

Il est possible d'obtenir directement les coordonnées de l'image du Soleil projetée à l'intérieur du cadran. Il sera ensuite aisé de projeter cette image sur n'importe quel plan de référence pour mieux appréhender la nature des courbes d'égale déclinaison. Nous avons choisi un repère cartésien centré sur l'oeilleton O, d'axe Oz vertical et dont les axes Ox et Oy, qui définissent le plan horizontal, sont respectivement orientés vers l'Est et le Nord (figure 4). Dans ce référentiel, les coordonnées angulaires définissant la direction du Soleil sont bien sûr les coordonnées horizontales h et a . Les coordonnées (p, q, r) du vecteur unitaire \vec{u} joignant l'oeilleton O au Soleil S sont donc données par les relations :

$$\begin{pmatrix} p = -\cos h \sin a \\ q = -\cos h \cos a \\ r = +\sin h \end{pmatrix}$$

D'autre part, le cadran est une demi-sphère S de rayon R et de centre C $(0, 0, -R)$, tangente en O au plan Oxy et dont le plan de coupure est le plan Est-Ouest. Son équation cartésienne s'écrit donc :

$$x^2 + y^2 + (z + R)^2 = R^2 \quad \text{et } y \geq 0.$$

Trouver les coordonnées de l'image du Soleil sur l'intérieur du cadran revient à chercher l'intersection de la droite portée par \vec{u} et passant par O avec la demi-sphère S. Un point quelconque de la droite (O, \vec{u}) ayant pour coordonnées paramétriques $(\lambda p, \lambda q, \lambda r)$, le paramètre λ de l'intersection cherchée vérifie $(\lambda p)^2 + (\lambda q)^2 + (\lambda r + R)^2 = R^2$. Comme \vec{u} est unitaire (c'est-à-dire que $p^2 + q^2 + r^2 = 1$), l'équation du second degré précédente possède deux solutions en λ dont l'une est nulle et correspond à l'oeilleton et l'autre, image du Soleil qui nous intéresse ici, vaut $\lambda = -2rR$. Ainsi, les coordonnées cartésiennes de l'image du Soleil sur l'intérieur du cadran valent :

$$\begin{pmatrix} X = -2Rpr \\ Y = -2Rqr \\ Z = -2Rr^2 \end{pmatrix}$$

Quelques exemples de cette courbe paramétrée par l'angle horaire H sont représentées figure 5. Pour trouver la projection de cette courbe sur le plan équatorial, qui se déduit du plan Oxy par une rotation d'angle $90^\circ - \phi$ autour de Ox, il suffit d'appliquer cette rotation aux coordonnées de l'image du Soleil. On obtient alors les coordonnées (X', Y', Z') de l'image du Soleil dans le référentiel équatorial :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^\circ - \phi) & -\sin(90^\circ - \phi) \\ 0 & \sin(90^\circ - \phi) & \cos(90^\circ - \phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2R \sin h \cos \delta \sin H \\ +2R \sin h \cos \delta \cos H \\ -2R \sin h \sin \delta \end{pmatrix}$$

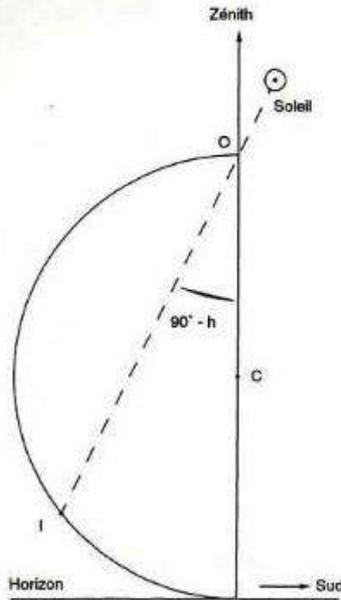


Fig. 1 : Vue dans le plan OCI. Les rayons solaires passant par l'oeilleton O projettent une image du Soleil au point I de la concavité.

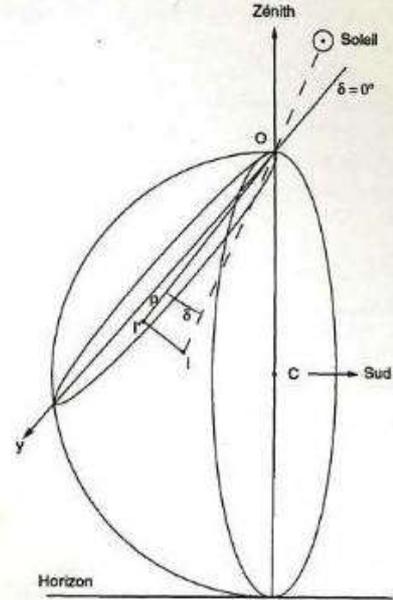


Fig. 2 : La figure montre une vue tridimensionnelle de la projection de l'image I du Soleil sur le point I' du plan équatorial.

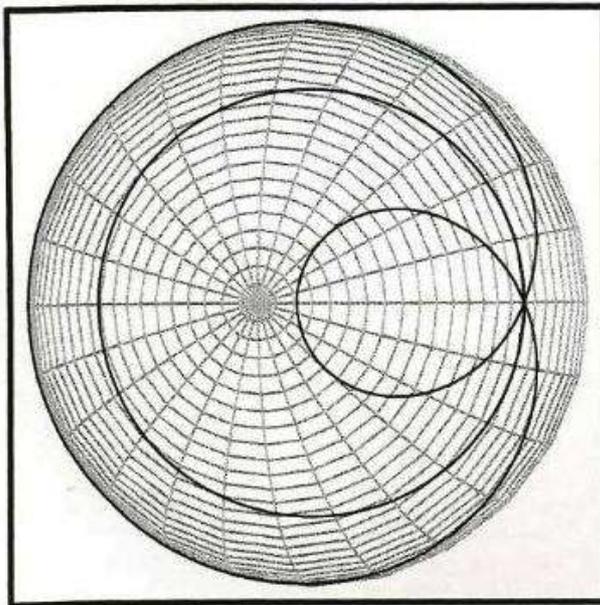


Fig. 3 : On a représenté pour la latitude $\phi = 41^\circ$ les projections dans le plan équatorial des courbes des solstices d'été et d'hiver (pour lesquelles la déclinaison du Soleil vaut respectivement $+\epsilon$ et $-\epsilon$, ϵ étant l'obliquité de l'écliptique) et celle des équinoxes ($\delta = 0^\circ$). La courbe des équinoxes est un cercle. Les courbes des solstices forment ensemble une conchoïde dont la petite boucle est parcourue au solstice d'hiver et la grande au solstice d'été. L'image du Soleil parcourt ces courbes dans le sens horaire.

Les coordonnées cartésiennes (X', Y') de la projection de I sur le plan équatorial redonnent bien l'équation polaire (1). La projection de I dans le plan du méridien a pour coordonnées (Y', Z') .

Comme $\sin h = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos H$, on peut écrire que :

$$\cos \delta \cos H = - \left(\frac{Z'}{2R \sin \delta} + \sin \phi \sin \delta \right) \frac{1}{\cos \phi}$$

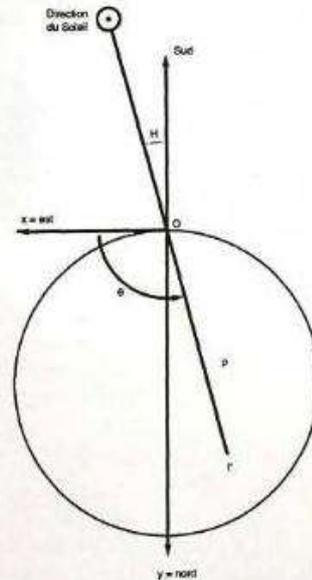


Fig. 4 : Orientation du cadran en coordonnées horizontales.

En remplaçant dans l'expression de Y' , on obtient l'équation cartésienne de la projection sur le plan méridien de la courbe parcourue par l'image du Soleil :

$$Y' = \frac{Z'}{\sin \delta \cos \phi} \left(\frac{Z'}{2 \sin \delta} + \sin \phi \sin \delta \right)$$

C'est l'équation d'une parabole passant par O (figure 6) sauf si $d = 0^\circ$ où c'est une droite, projection du cercle équatorial dans le plan méridien.

Enfin, la projection de l'image du Soleil dans le plan vertical Est-Ouest Oxz a pour coordonnées (X, Z) . Cela donne l'allure des courbes, tracées à l'intérieur du cadran vues en le regardant face à sa concavité. On obtient des ovales (figure 7) sauf dans le cas particulier où $d = 0^\circ$ pour lequel on a une ellipse d'équation cartésienne :

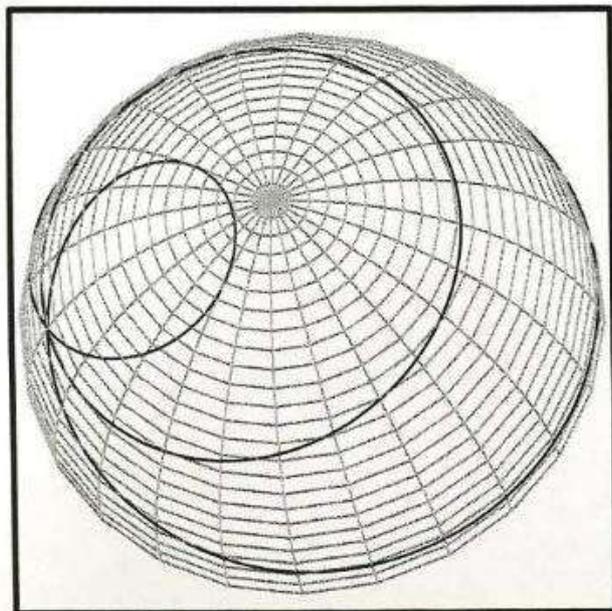


Fig. 5 : On a représenté pour la latitude $\phi = 41^\circ$ les courbes tridimensionnelles suivies par l'image du Soleil sur l'intérieur du cadran lors des solstices et des équinoxes.

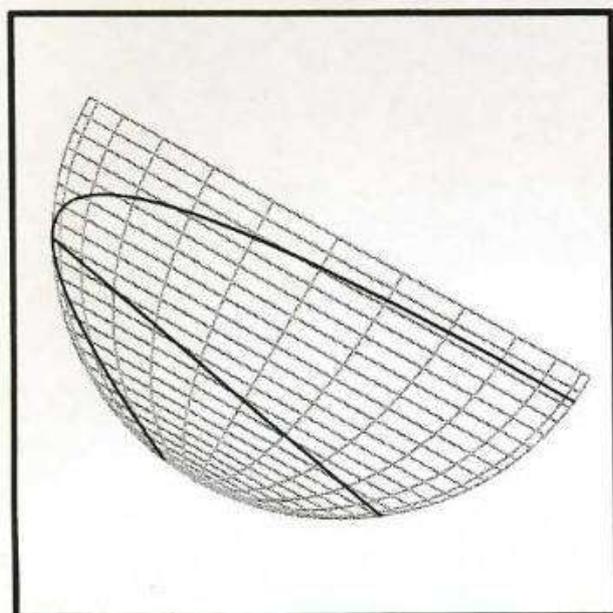


Fig. 6 : On a représenté pour la latitude $\phi = 41^\circ$ les projections sur le plan méridien des courbes suivies par l'image du Soleil lors des solstices et des équinoxes. La courbe équinoxiale est une droite, trace du cercle équinoxial tout entier contenu dans le plan équatorial. La courbe des solstices est une parabole. Les graduations sont en unité du rayon de la demi-sphère du cadran.

$$\left(\frac{X}{R \cos \phi}\right)^2 + \left(\frac{Z}{R \cos^2 \phi} + 1\right)^2 = 1$$

qui correspond à la projection du cercle équatorial dans le plan vertical.

1.2 - NATURE DES COURBES HORAIRES

Les courbes d'égale angle horaire sont, par définition, des courbes pour lesquelles l'angle horaire H est fixé. Ce sont donc des arcs de petits cercles, intersection des plans horaires avec la demi-sphère du cadran. Cependant, il ne

faut pas oublier que dans l'Antiquité, la durée du jour était égale à 12 heures toute l'année. Les cadrans indiquaient donc des heures dites inégales car de durée variable selon la période de l'année. La durée de ces heures est égale au sixième de l'arc semi-diurne H_0 défini par $\cos H_0 = -\tan f \tan d$. Ainsi, à une heure T lue sur le cadran correspond un angle horaire $(T - 12 \text{ h}) \times H_0 / 6$. L'heure inégale est égale à l'heure équinoxiale (60 minutes) aux équinoxes. L'emploi des heures inégales dans le tracé explique pourquoi les courbes d'heures sont déformées à leurs extrémités, et ce d'autant plus que l'on se rapproche des heures de lever et de coucher du Soleil (figure 8).

2 - PARAMÈTRES DU CADRAN DE CARTHAGE

L'examen minutieux du cadran découvert à Carthage montre par différentes méthodes que son rayon intérieur est de 24,55 cm⁷. Le cadran comportant sept courbes de déclinaison, on mesure tout d'abord sur la ligne de midi l'arc compris entre l'équinoxe et le solstice d'hiver, puis l'arc compris entre l'équinoxe et le solstice d'été. En théorie, cette méthode permet de vérifier la valeur de l'obliquité e adoptée, puisque l'on a (figure 9) $HE = ES = 2Re$, e étant exprimé en radians, E étant l'image du Soleil à midi aux équinoxes, S l'image du Soleil à midi au solstice d'été et H l'image du Soleil lors du solstice d'hiver. On trouve que $HE = 20,5$ cm et $ES = 20$ cm ; dans le premier cas, on obtient une obliquité de $23^\circ 55'$, et dans le second cas une obliquité de $23^\circ 20'$. La dissymétrie entre HE et ES est anormale. Si on admet que le cadran date du premier ou du deuxième siècle de notre ère, l'obliquité adoptée doit être proche de $23^\circ 50'$, valeur utilisée par Ptolémée⁸ au II^e siècle ap. J.-C, souvent arrondie à 24° . Il est certainement vain de chercher une haute précision dans la valeur adoptée par le constructeur, d'autant plus que les mesures faites sur le cadran comportent une incertitude. Compte-tenu de ces remarques, on adoptera par la suite $e = 24^\circ$.

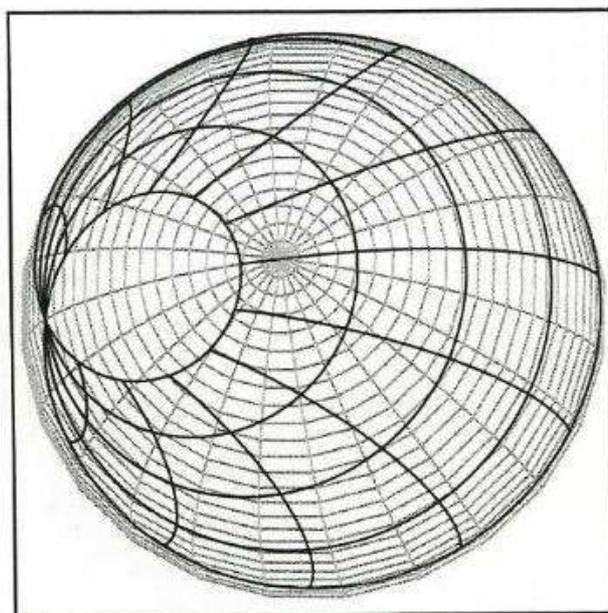


Fig. 8 : On a représenté pour la latitude $\phi = 41^\circ$ une vue tridimensionnelle du cadran sur lequel sont tracées quelques courbes d'égale déclinaison et les courbes horaires d'heures inégales de 7 h à 17 h. Toutes les courbes se joignent sur l'oeilleton.

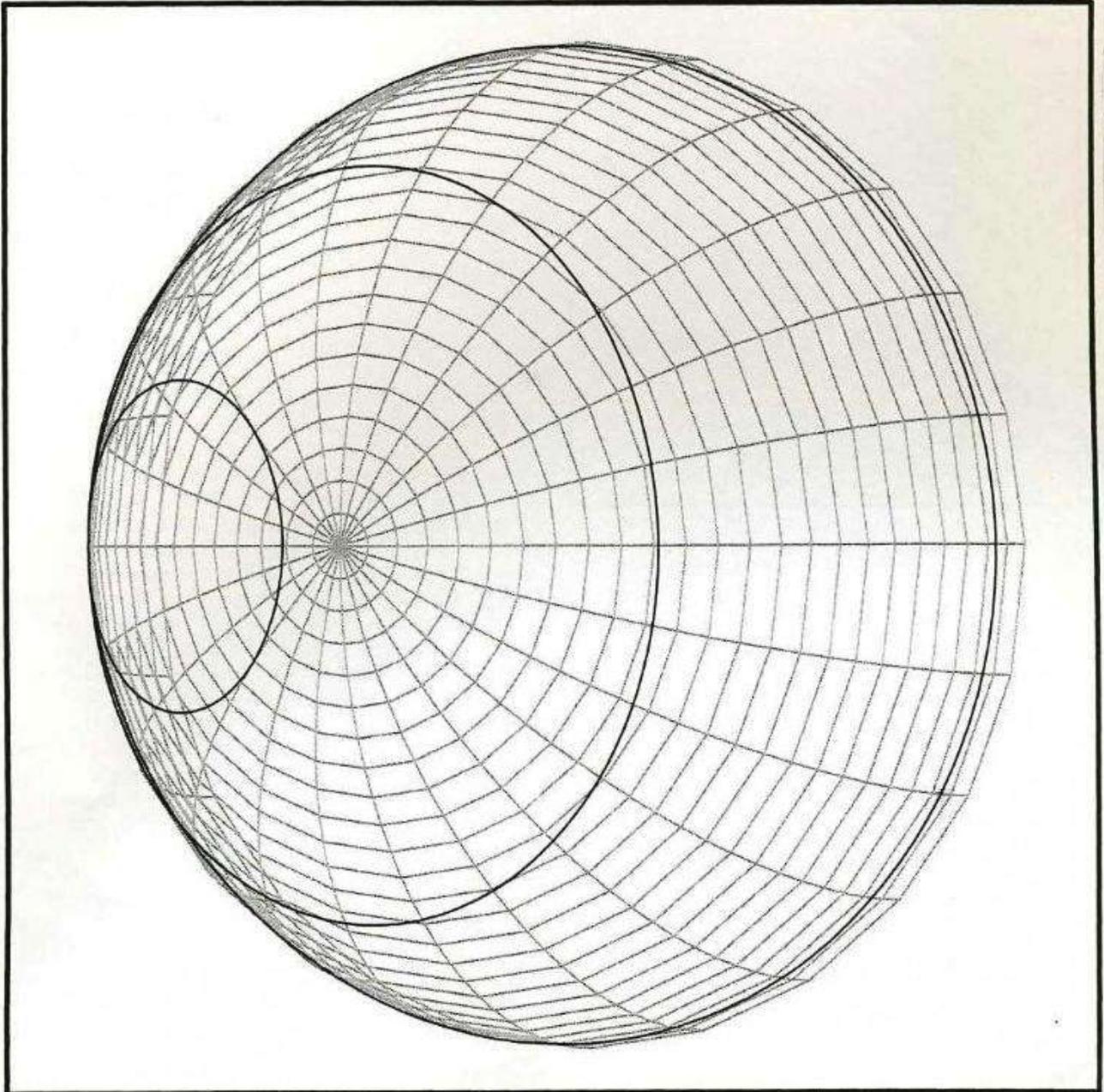
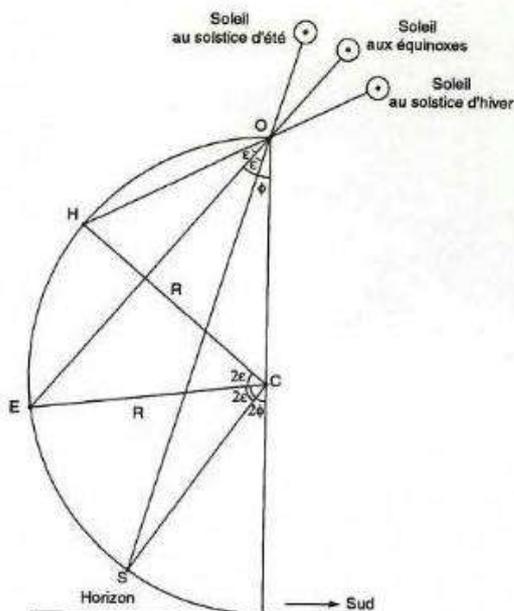


Fig. 7 : On a représenté pour la latitude $\phi = 41^\circ$ les projections sur le plan vertical des courbes suivies par l'image du Soleil lors des solstices et des équinoxes. La courbe équinoxiale est une ellipse, projection du cercle équinoxial. Les courbes des solstices sont des ovales.



La détermination de la latitude est plus difficile parce que l'oeilleton a de toute évidence un diamètre trop important (5 cm). Il est plus que probable que le constructeur avait muni l'oeilleton d'un diaphragme afin de laisser passer un mince pinceau de lumière, comme le suggèrent les points d'ancrage situés sur son pourtour. Dans un cas idéal, on a $\cos f = OE/2R$, d'où l'on tire la latitude. En obturant l'oeilleton, et en déterminant au mieux le point de convergence des courbes, on trouve $OE = 37$ cm, d'où $f = 41^\circ 06'$. Une erreur de 1 % se traduit par un écart d'environ 40' sur la valeur de f .

On peut aussi tirer partie du fait que la courbe équinoxiale est plane et qu'une heure temporaire est égale à

← Fig. 9 : Principe de la mesure de l'obliquité adopté pour le tracé du cadran. On utilise la position de l'image du Soleil à l'intérieur du cadran aux équinoxes (point E) et aux solstices à midi (points H et S).

15°. La distance entre deux points horaires symétriques par rapport à midi situés sur la courbe des équinoxes permet de déduire la latitude du lieu par l'intermédiaire de l'équation (1) : on a alors, en appelant d la distance : $d = 2R \cos \delta \sin 2H$, d'où

$$\cos \phi = \frac{d}{2R \sin 2H}$$

On trouve :

pour $H = \pm 15^\circ$, $d = 18,5$ cm	d'où	$\phi = 41^\circ 06'$
pour $H = \pm 30^\circ$, $d = 32$ cm	d'où	$\phi = 41^\circ 11'$
pour $H = \pm 45^\circ$, $d = 36,8$ cm	d'où	$\phi = 41^\circ 27'$
pour $H = \pm 60^\circ$, $d = 32,2$ cm	d'où	$\phi = 40^\circ 47'$
pour $H = \pm 75^\circ$, $d = 18,5$ cm	d'où	$\phi = 41^\circ 06'$

La valeur moyenne de $41^\circ 07'$ confirme donc une latitude proche de 41° . Pour les autres courbes, le problème se complique, puisqu'il faut calculer l'heure temporaire T, mais le principe reste le même : deux points d'une courbe d'égale déclinaison, symétriques par rapport à midi, sont écartés d'une distance égale à $4R \cos \delta \sin T$ ($\sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos T$). Il est plus simple de comparer ici la théorie aux mesures. Les résultats concernant la courbe du solstice d'été sont résumés ci-dessous :

11 h - 13 h, $d_{\text{théorie}} = 26,5$ cm	$d_{\text{mesuré}} = 26,7$ cm
10 h - 14 h, $d_{\text{théorie}} = 44,4$ cm	$d_{\text{mesuré}} = 44,7$ cm
9 h - 15 h, $d_{\text{théorie}} = 48,4$ cm	$d_{\text{mesuré}} = 48,5$ cm
8 h - 16 h, $d_{\text{théorie}} = 38,4$ cm	$d_{\text{mesuré}} = 38,5$ cm
7 h - 17 h, $d_{\text{théorie}} = 19,6$ cm	$d_{\text{mesuré}} = 20,5$ cm

Pour la courbe d'hiver, il est pratiquement impossible de faire des mesures ; la seule distance fiable concerne 11 h - 13 h, où $d_{\text{théorie}} = 7,1$ cm et $d_{\text{mesuré}} = 7,1$ cm. On notera au passage que ce calcul confirme, s'il en était besoin, l'utilisation des heures temporaires.

Nous avons aussi utilisé une troisième méthode pour déterminer la latitude, basée sur le volume. Elle consiste à remplir le scaphé d'eau jusqu'à ce que le niveau du liquide coïncide avec la courbe des équinoxes (ce qui permet de vérifier au passage que c'est bien une courbe plane). Le volume V d'une calotte sphérique est égal à

$$\frac{1}{3} \pi r^2 (3R - r)$$

où R est le rayon de la sphère et r la distance entre le sommet de la sphère et le plan de coupure de la calotte. Il est facile d'établir que la distance entre le centre du cercle équinoxial et la sphère est $r = R(1 - \sin \phi)$. Nous avons mesuré un volume de 4800 ml avec une erreur estimée à 100 ml, correspondant à une erreur d'estimation du niveau de 0,1 cm. Après résolution de l'équation du second degré qui donne $\sin \phi$, et en prenant $R = 24,55$ cm, nous obtenons une latitude égale à $41^\circ 11'$. L'incertitude de 2% sur le volume mesuré se traduit par une incertitude de $11'$ sur la valeur de la latitude.

Il apparaît donc, – et c'est un point fondamental –, que le scaphé découvert à Carthage était calculé pour fonctionner à une latitude proche de 41° . Ptolémée, dans le Livre II de l'*Almageste*⁹, indique que la latitude 41° est celle de l'Hellas et de Rome. Carthage, ville située près de Tunis, était située par les Anciens à $32^\circ 40'$ de latitude, comme en témoigne Ptolémée dans ses *Tables faciles*¹⁰, la valeur moderne étant $36^\circ 51'$.

En toute rigueur, le cadran étant calculé pour 41° de latitude, mais installé 4° plus au Sud, l'heure indiquée n'était pas exacte, sauf à midi. Il ne faut cependant pas accorder une trop grande importance à ce défaut : entre Rome et Carthage, il y a au maximum 2 minutes d'écart dans la durée d'une heure inégale, ce qui est négligeable. On sait par ailleurs qu'une erreur de 1° en latitude se traduit aux maximum et à certaines heures par une erreur de 2 min dans la lecture de l'heure¹¹, soit ici huit minutes d'écart. Il est pratiquement certain que ces inexactitudes, si on les a estimées, devaient être jugées sans importance.

3 - INSCRIPTIONS RELEVÉES SUR LE CADRAN

Le scaphé comporte sept courbes de déclinaison, toutes accompagnées d'inscriptions, parfois abrégées, en grec¹². ΠΗΚ est l'abréviation de *προ οκτω κλανδων*, soit «8 jours avant les calendes de». Il s'agit de toute évidence d'une traduction du grec en latin des mois du calendrier julien.

1 ^{er} ligne	ΚΥΚΛΟΣ ΘΕΠΙΝΟΧ ΤΡΟΠΡΙΚΟΣ ΠΡΟ ΟΚΤΩΙ ΚΑΛΑΝΔΩΝ ΙΟΥΛΙΩΝ [cercle tropique d'été] [8 jours avant les calendes de juillet] = 24 juin
2 ^e ligne	ΠΗΚ ΙΟΥΝΙΩΝ ΠΗΚ ΑΥΤΥΣΤΩΝ [8 jours avant les calendes de juin] = 25 mai [8 jours avant les calendes d'août] = 25 juillet
3 ^e ligne	ΠΗΚ ΜΑΙΩΝ ΠΗΚ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΩ [8 jours avant les calendes de mai] = 24 avril [8 jours avant les calendes de septembre] = 5 août
4 ^e ligne	ΠΗΚ ΑΠΡΙΑΙ[ω] Ν ΠΗΚ ΟΚΤΩΒΡΙΩΝ [8 jours avant les calendes d'avril] = 25 mars [8 jours avant les calendes d'octobre] = 24 septembre ...] ΝΟΧ ΚΥΚΑ [... équi] nox cerc[le
5 ^e ligne	ΠΗΚ ΜΑ.. ΤΙ ΠΗΚ ΝΟΕΜΒΡΙΩ [8 jours avant les calendes de mars] = 22 février [8 jours avant les calendes de novembre] = 25 octobre
6 ^e ligne	Π.. ΩΝ ΗΚ ΔΕΚΕΜΒΡΙΩΝ] avant [... [février] = 25 janvier [8 jours avant les calendes de décembre] = 24 novembre

7e ligne KY KAOX [...] NOX
 ΤΡΟΠΙΚΟΧ ΠΗΚ
 ΙΑΝΑΡΙΩΝ
 [Cercle du tropique d'hiver]
 [8 jours avant les calendes de janvier] =
 25 décembre

Dans le calendrier julien, les dates marquant le début des quatre saisons sont le 25 mars pour l'équinoxe de printemps, le 24 juin pour le solstice d'été, le 24 septembre pour l'équinoxe d'automne et le 25 décembre pour le solstice d'hiver¹³. Ces dates correspondent parfaitement à celles inscrites dans le scaphé. La présence du nom ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ, nom du mois *Sextilis* dans le calendrier julien qui devint août à la suite de la correction de l'Empereur Auguste de l'erreur des Pontifes quant à l'intercalation des années bissextiles¹⁴, impose une date postérieure à 8 av. J.-C. pour ce cadran¹⁵.

Pour les dates intermédiaires, l'interprétation est plus délicate ; on peut supposer qu'elles correspondent à l'entrée du Soleil dans les signes du zodiaque¹⁶. On obtient comme intervalle entre les dates :

24 juin – 25 juillet = 31 jours	Cancer
25 juillet – 25 août = 31 jours	Lion
25 août – 24 septembre = 30 jours	Vierge
24 septembre – 25 octobre = 31 jours	Balance
25 octobre – 24 novembre = 30 jours	Scorpion
24 novembre – 25 décembre = 31 jours	Sagittaire
25 décembre – 25 janvier = 31 jours	Capricorne
25 janvier – 22 février = 28 jours	Verseau
22 février – 25 mars = 31 jours	Poissons
25 mars – 24 avril = 30 jours	Bélier
24 avril – 25 mai = 31 jours	Taureau
25 mai – 24 juin = 30 jours	Gémeaux

En supposant que les courbes de déclinaison soient tracées pour l'entrée du Soleil dans les signes du zodiaque, on aurait $\sin \delta = \sin 24^\circ \sin \lambda$, λ étant la longitude du Soleil comptée par intervalles de 30° , de 0° à 360° depuis l'équinoxe de printemps. Cependant, cette méthode de vérification n'est pas probante, essentiellement en raison des incertitudes de mesures sur le cadran.

4 - LE MENAEUS

L'examen du scaphé montre des points situés sur les courbes de déclinaison, qui, reliés entre eux, déterminent à peu près un cercle. Il est probable que ces points sont les vestiges de ce que Vitruve appelle un menaeus et qui sert pour le tracé des courbes de déclinaison du Soleil. Le menaeus 17 désigne un cercle auxiliaire divisé en douze secteurs égaux de 30° correspondant à la trajectoire du Soleil sur l'écliptique en un mois selon la convention classique de la gnomonique. A notre connaissance, on ne connaît qu'un seul cadran antique présentant un menaeus 18, et aucun sur un cadran sphérique à oeilleton.

Le tracé du menaeus est simple dans un scaphé à oeilleton : à l'aide d'un compas dont on plante la pointe en E, image du Soleil à midi aux équinoxes, on décrit dans la concavité un cercle de rayon $2R \sin \epsilon$. On peut également se servir d'une figure circulaire de diamètre $2R \sin 2\epsilon$ que l'on place tangentielllement aux courbes des solstices sur la ligne de midi. Mais contrairement au cas du cadran sphérique classique que décrit Vitruve, le centre

du menaeus d'un cadran sphérique à oeilleton n'est plus situé à mi-chemin entre H et S, mais en E' (figure 10). Ce qui signifie que le point depuis lequel on reporte les secteurs de 30° est excentré. En appelant K le centre du menaeus, on démontre que la distance $KE' = 2R \sin 2\epsilon \tan \phi$. C'est depuis ce point que l'on reporte la longitude du Soleil ; l'intersection d'un rayon issu de K intercepte alors la concavité en un point correspondant à une courbe de déclinaison.

Cherchons l'angle horaire du Soleil lorsque la tache de lumière tombe sur le menaeus. Par convention, on comptera les longitudes du Soleil dans le sens horaire depuis E, intersection du menaeus avec le cercle équinoxial (figure 11). En appelant r' le rayon de longueur variable mesuré depuis E', on démontre que :

$$r' = R \sin 2\epsilon \frac{\cos(\lambda + c)}{\cos \lambda}$$

avec $\sin c = -\tan \epsilon \tan \phi \cos \lambda$, λ étant la longitude du Soleil. Si $\lambda = 90^\circ$ ou 270° , $r' = 2R \sin \epsilon$ ($\sin \epsilon \tan \phi + \cos \epsilon$). L'angle horaire du Soleil s'obtient en résolvant par approximations successives l'équation :

$$R (\sin \phi \sin 2\delta \sin H + \cos \phi \cos^2 \delta \sin 2H) = r' \cos \lambda$$

avec $\sin \delta = \sin \epsilon \sin \lambda$. En prenant $\phi = 41^\circ$, $R = 24,55$ cm et $\epsilon = 24^\circ$, on obtient :

$\lambda = 0^\circ$	$d = 0^\circ$	$r' = 16,822$ cm	$H = 32^\circ,611$
$\lambda = 30^\circ$	$d = 11^\circ,73$	$r' = 20,719$ cm	$H = 28^\circ,470$
$\lambda = 60^\circ$	$d = 20^\circ,62$	$r' = 24,014$ cm	$H = 16^\circ,734$
$\lambda = 90^\circ$	$d = 24^\circ$	$r' = 25,305$ cm	$H = 0^\circ$

En examinant le scaphé, on remarque que les vestiges du menaeus ne sont pas tous placés correctement ; néanmoins, sa présence témoigne d'un certain degré de sophistication quant à la méthode de construction utilisée.

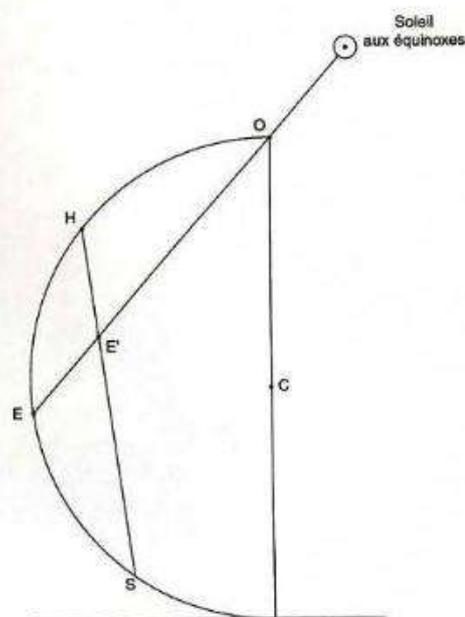


Fig. 10 : Vue en coupe méridienne du scaphé. H, E et S sont respectivement les positions du Soleil à midi au solstice d'hiver, aux équinoxes, au solstice d'été. Le menaeus est ici le diamètre HS mais son centre est en E'.

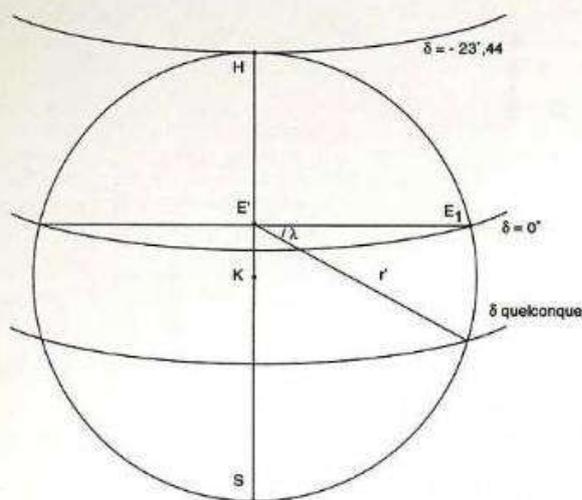


Fig. 11 : Principe du *menaeus*. La figure circulaire, tangente dans le cadran aux courbes des deux solstices, permet le tracé des courbes de déclinaison intermédiaire.

5 - CONCLUSION

Il apparaît à la suite de cette étude que le scaphé trouvé à Carthage n'était pas tracé à l'origine pour cette ville. Son caractère romain est cependant indiscutable : les noms des mois du calendrier julien tra-

duits en grec, l'aspect extérieur du cadran, richement décoré de feuilles de chêne et de glands, sont des éléments convergents.

En ce qui concerne son tracé, on peut imaginer qu'une fois la surface creusée, l'oeilleton placé et l'ensemble orienté, la constructeur a patiemment noté la position de la tache de lumière dans la concavité à partir d'un d'autre cadran solaire servant de référence ; cette solution présente l'avantage de combiner le calcul théorique, – la position de certaines courbes de déclinaison et d'heures s'obtenant facilement par projection –, et l'empirisme. Mais l'absence d'un traité précis écrit par un «cadranier» de la période gréco-romaine ne permet pas de trancher en faveur de telle ou telle hypothèse.

Il est important de souligner malgré tout que de nombreuses lignes horaires et certaines courbes de déclinaison sont totalement erronées¹⁹.

Le «destinataire» de ce scaphé devait être non seulement d'une classe sociale élevée, mais aussi lettré. On ne peut rien affirmer de sûr quant à la raison de la présence de ce cadran à Carthage ; a-t-il été déplacé lors d'un voyage ? Ou a-t-il été sculpté ?

Il n'en reste pas moins que ce cadran solaire antique, de part son état de conservation et son niveau de sophistication, constitue à ce jour l'exemplaire le plus exceptionnel que l'on connaisse.

¹⁹P. GAGNAIRE, «Le scaphé de Carthage», *Astronomie*, vol. 112, 1998, p. 179-182. L'appellation d'*antiboreum* donnée à ce scaphé par l'auteur nous paraît incorrecte. En effet, *antiboreum*, terme utilisé par Vitruve dans son *De architectura* (VITRUVÉ, *De architectura*, Livre IX, chap. VIII, 1, trad. J. Soubiran, Les Belles Lettres, Paris, 1969, p. 31, et commentaires p. 266) désigne clairement un cadran solaire tourné vers le Nord : *antiborée* = face au Nord. Or le scaphé découvert à Carthage ne peut fonctionner que tourné vers le Sud. S. L. GIBBS (*Greek and Roman Sundials*, Yale University Press, New Haven and London, 1976, p. 23) désigne le cadran qui nous intéresse par «Roofed Spherical Dials», que l'on peut traduire par «cadran sphérique avec toit». L'appellation d'*arachné* semble être la mieux appropriée à ce cadran ; ce terme a été utilisé par Vitruve pour désigner un cadran solaire attribué à Eudoxe ou à Apollonius, où le réseau des lignes horaires et des courbes de déclinaison a l'apparence d'une toile d'araignée. Mais les avis divergent sur la surface réceptrice et sur la nature de l'*arachné*. Le cadran étudié dans le présent article a été décrit en quelques lignes dans le catalogue de l'exposition *Images of Time*, ed. by A. J. Turner, The Hague, 1990, p. 60-61 ; l'auteur de la brève description du cadran le date entre le III^e et le IV^e siècle de notre ère.

²⁰Il existe d'autres exemplaires du même genre de scaphé que celui découvert à Carthage, dont un très bien conservé au Musée de Berlin (Nr 1048) ; c'est un bloc de marbre de 50 cm de haut, 42 cm de large, et de 50 cm de profondeur. Il comporte 3 arcs diurnes et 11 lignes horaires. La théorie de ce cadran a été donnée par J. DRECKER, *Die Theorie der Sonnenuhren*, Berlin, 1925, p. 25-33 ; S.L. GIBBS, *op. cit.*, p. 23-27, et notes p. 98-99, donne une discussion intéressante des quelques rares exemplaires du même genre de scaphé, mais s'appuie totalement sur Drecker pour l'aspect mathématique du cadran. Un seul autre exemplaire du même genre de scaphé que celui découvert à Carthage possède plus de trois arcs de déclinaison (GIBBS, *op. cit.*, p. 373, n° 7001 G). On citera aussi l'exemplaire qui se trouve au Musée Archéologique National de Madrid ; il a été découvert à Belo, ville située près de Tarifa en Espagne, près du détroit de Gibraltar. Ce cadran a fait l'objet d'une analyse, – qui contient des affirmations contestables – de J. M. RAYA ROMAN, parue dans le *Boletín del Museo Arqueológico Nacional*, Madrid, 1984, p. 103-115. Il s'agit du cadran que donne GIBBS (n° 2020) p. 215. Au moins trois autres cadrans du même type existent en Yougoslavie, non répertoriés par GIBBS ; une succincte présentation en est donnée dans M. TADIC, *Catalogue of the antic and the middle ages sundials in Yugoslavia*, Publications of the Astronomical Observatory of Sarajevo, Sarajevo, 1988, n° 2, p. 2-8.

²¹On trouvera une description beaucoup plus développée par A. PASQUIER, «Un cadran solaire d'exception pour le département des Antiquités grecques, étrusques et romaines», *La revue du Louvre*, n° 3-2000, p. 13-15. Selon A. Pasquier, Conservateur en chef des Antiquités grecques, étrusques et romaines du Musée du Louvre, le cadran daterait du premier siècle de notre ère.

²²Dans le cas du cadran solaire classique à style droit ou polaire, le cône intercepte un plan. Cela permet, par exemple, de montrer immédiatement que les courbes d'égalité de déclinaison du cadran horizontal à style vertical sont des coniques.

²³Sur le calcul général des cadrans solaires et la réduction de l'équation d'une conique appliquée aux courbes de déclinaison sur un cadran plan, voir D. SAVOIE, *La Gnomonique*, Paris, Les Belles Lettres, 2001.

²⁴Egalement appelée «limaçon de Pascal», cette courbe a été étudiée avant 1644 par Roberval qui lui aurait donné le nom du grand-père du mathématicien Pascal ; voir «Courbes mathématiques», *Revue du Palais de la découverte*, n° 45, décembre 1995, p. 35-36.

²⁵Pour mesurer le rayon du scaphé, nous avons d'abord utilisé un mètre souple et mesuré en différents endroits un demi-périmètre de 77 cm avec une erreur de lecture estimée à 1 mm, ce qui correspond à un rayon de $24,5 \pm 0,1$ cm. Disposant d'une copie exacte du cadran, nous avons aussi mesuré son volume en le remplissant d'eau à ras bord. Nous avons obtenu un volume de 31 litres avec une erreur estimée à 200 ml, ce qui correspond à une erreur d'appréciation du niveau maximum estimée à 1 mm à cause des irrégularités de la surface intérieure du cadran et des effets de capillarité. Sachant que le volume V d'une demi-sphère de rayon R vaut $V = \frac{2}{3} \pi R^3$, le rayon obtenu par cette seconde méthode vaut 24,55 cm. Le volume

variant comme le cube du rayon, l'incertitude relative sur le rayon est égale au tiers de celle sur le volume, égale à $0,2/31 = 0,6\%$. La précision sur le rayon vaut donc 0,05 cm. Cette deuxième méthode est donc plus précise que la mesure directe et permet d'affirmer que le rayon du cadran de Carthage vaut $24,55 \text{ cm} \pm 0,05 \text{ cm}$.

⁸Seuls les astronomes, tels Hipparque et Ptolémée, utilisaient des valeurs précises de l'obliquité, la plupart des praticiens utilisant par commodité 24° ; voir O. NEUGEBAUER, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975, p. 772 et 844. Ce qui montre bien à quel point il est pratiquement impossible de dater un cadran antique par l'obliquité, dont la valeur correcte était non seulement mal connue, mais surtout dont la lente diminution ($1'$ par siècle environ) était insoupçonnée. Sur la valeur de l'obliquité utilisée par Ptolémée, voir O. PERDERSEN, *A Survey of Almagest*, Odense University Press, 1974, p. 423. Voir également A. SZABO, E. MAULA, *Les débuts de l'astronomie, de la géographie et de la trigonométrie chez les Grecs* - L. SIMON, - 4000 to + 2800, Willmann-Bell, Inc, Richmond, USA, 1986, p. 6.

⁹*Ptolemy's Almagest*, trad. G. J. Toomer, London, 1984, p. 86. Sur les latitudes dans l'Antiquité et la théorie des sept climats, voir O. NEUGEBAUER, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, op. cit., part. II, p. 727 et passim. Du même auteur, *Les sciences exactes dans l'Antiquité*, 1990, p. 229-231.

¹⁰*Tables faciles. Commentaire de Théon d'Alexandrie sur les tables manuelles astronomiques de Ptolémée*, ed. N. Halma, Paris, 1822, p. 118. Selon une indication de Strabon, Hipparque plaçait Carthage à une latitude de $32^\circ 28'$: voir O. NEUGEBAUER, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, op. cit., part. II, p. 746, note 3. Il paraît évident que la latitude de Carthage était mal connue, et ce au moins depuis Eratosthène ; voir la carte donnée par R. D'HOLLANDER, «Sciences géographiques, connaissance du monde et conception de l'Univers dans l'Antiquité», *Revue XYZ*, Association Française de Topographie, n° 57, 1993, p. 133.

¹¹On sait par PLINE L'ANCIEN, *Histoire Naturelle*, Livre II, trad. et com. de J. Beaujeu, Les Belles Lettres, Paris, 1950, p. 80, chap. LXXIV, que les cadrans solaires devaient être changés toutes les fois que l'écart en latitude dépassait 300 ou 500 stades (entre 47 km et 78 km) : «De plus, les mêmes cadrans solaires ne servent pas partout, car au bout de 300 ou 500 stades au plus les ombres portées par le soleil changent». Sur l'erreur commise dans la lecture de l'heure par un déplacement en latitude, D. SAVOIE, *La Gnomonique*, op. cit., chap. XXIV. On démontre dans cet ouvrage que 1° d'erreur en latitude, soit 111 km environ sur le terrain, entraîne une erreur dans la lecture de l'heure de moins de 2 minutes au maximum.

¹²Nous remercions Concetta LUNA, philologue à l'Université de Pise, et Alain SEGONDS, Directeur de Recherches au CNRS, pour leur aide précieuse dans la traduction et l'interprétation des inscriptions grecques.

¹³Ces dates ne correspondaient pas toutes à la réalité astronomique. On ne possède aucun renseignement précis sur les données astronomiques ayant servi à la réforme julienne.

¹⁴Voir par exemple SÜETONE, *Vies des douze Césars*, XXXI, trad. H. Ailloud, Les Belles Lettres, Paris, 1931.

¹⁵Cette date butoir a été notée par P. GAGNAIRE, «Le scaphé de Carthage», op. cit., p. 180-181, mais avec des fautes de frappe sur la date : l'édit sénatorial conférant le nom d'*Augustus* à *sextilis* date de 8 av. J.-C., et non de 9 ap. J.-C. Voir P. BRIND'AMOUR, *Le calendrier romain*, ed. Université d'Ottawa, 1983, p. 11-14. Il est à peine utile de mentionner que le mois de juillet, anciennement *Quintilis*, corrobore une datation julienne.

¹⁶Les dates d'entrée du Soleil dans les signes du zodiaque sont plus ou moins variables selon les auteurs et les époques ; à cette confusion s'ajoute la dérive du calendrier julien au cours des siècles en raison de l'approximation faite sur la durée de l'année tropique. Voir O. NEUGEBAUER, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, op. cit., p. 593-597, et H. STERN, *Le Calendrier de 354*, Institut Français d'Archéologie de Beyrouth, Bibliothèque Archéologique et Historique, t. LV, Paris, 1953, p. 57-59. On ne peut rien déduire de la date de l'équinoxe de printemps, qui, fixée au 21 mars dans le calcul de Pâques par le Concile de Nicée en 325, resta par la suite souvent attachée au 25 mars.

¹⁷«*circuli menstri... qui menaeus dicitur*», VITRUVÉ, *De architectura*, op. cit., p. 232-233. Il existe assez peu de littérature détaillée sur ce sujet précis ; on consultera pour une vision d'ensemble les ouvrages suivants : S. L. GIBBS, *Greek and Roman Sundials*, op. cit., p. 68 et p. 107. O. NEUGEBAUER, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, op. cit., p. 844-845. J. EVANS, *The History and Practice of Ancient Astronomy*, Oxford University Press, 1998, p. 139-140. J. DRECKER, *Die Theorie der Sonnenuhren*, op. cit., p. 1-3 et p. 55-56.

¹⁸Il s'agit du cadran des Orti Palombara qui se trouve au Musée du Vatican, Galleria dei Candelabri. On trouvera une photo de ce magnifique cadran sphérique dans S. L. GIBBS, *Greek and Roman Sundials*, op. cit., p. 16, et un dessin dans H. DIELS, *Antike Technik*, Leipzig-Berlin, 1924, p. 169, fig. 52.

¹⁹Ce sont les lignes horaires extrêmes, à l'aspect filiforme, qui s'écartent le plus de la réalité. Voir la tentative d'explication sur le tracé d'un tel cadran donnée par GIBBS, op. cit., p. 72-73. Sur l'utilisation de l'analemma dans le tracé des cadrans solaires, voir P. LUCKEY, «Das Analemma von Ptolemaeus», *Astronomische Nachrichten*, 230, n° 5498, 1927, p. 17-46 ; voir aussi J.-B. DELAMBRE, *Histoire de l'astronomie ancienne*, t. II, Paris, 1817, p. 458-519.